

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

pro žáky
základních škol a nižších ročníků víceletých gymnázií

65. ROČNÍK, 2015/2016

<http://math.muni.cz/mo>

Milí mladí přátelé,

máte rádi zajímavé matematické úlohy a chtěli byste si v jejich řešení zasoutěžit? Jestliže ano, zveme vás k účasti v matematické olympiádě (MO). Soutěž je dobrovolná a nesouvisí s klasifikací z matematiky. Mohou se jí zúčastnit žáci 5. až 9. ročníků základních škol a žáci jim odpovídajících ročníků víceletých gymnázií vždy ve svých kategoriích. Podrobnější rozdělení uvádí následující tabulka.

ZŠ	ročník		kategorie
	8leté G	6leté G	
9	4	2	Z9
8	3	1	Z8
7	2	–	Z7
6	1	–	Z6
5	–	–	Z5

Se souhlasem svého učitele matematiky můžete soutěžit i v některé kategorii určené pro vyšší ročník nebo v některé kategorii A, B, C, P, které jsou určeny pro studenty středních škol. Soutěžní úlohy pro kategorie A, B, C, P jsou uveřejněny v letáku Matematická olympiáda na středních školách.

Průběh soutěže

Soutěž v jednotlivých kategoriích probíhá ve dvou nebo ve třech kolech.

Kategorie Z9 má školní, okresní a krajské kolo.

Kategorie Z8, Z7, Z6 a Z5 mají školní a okresní kolo.

Školní kolo: V tomto vstupním kole soutěže, organizovaném na školách, řeší žáci ve svém volném čase (doma) šest úloh uveřejněných v tomto

letáku. Do soutěže budou zařazeni žáci, kteří odevzdají svým učitelům matematiky řešení alespoň čtyř úloh. Všem soutěžícím však doporučujeme, aby se snažili vyřešit všechny úlohy, protože v dalším průběhu soutěže mohou být zadány podobné úlohy.

Řešení úloh odevzdávejte svým učitelům matematiky v těchto termínech:

Kategorie Z5, Z9: první trojici úloh do **24. listopadu 2015** a druhou trojici úloh do **5. ledna 2016**.

Kategorie Z6 až Z8: první trojici úloh do **5. ledna 2016** a druhou trojici úloh do **22. března 2016**.

Vaši učitelé úlohy opraví a ohodnotí podle stupnice *1 – výborně, 2 – dobře, 3 – nevyhovuje*. Pak je s vámi rozeberou, vysvětlí vám případné nedostatky a seznámí vás se správným, popřípadě i jiným řešením. Úspěšnými řešiteli školního kola se stanou ti soutěžící, kteří budou mít alespoň u čtyř úloh řešení hodnocena výborně nebo dobře.

Práce všech úspěšných řešitelů kategorií Z6 až Z9 zašle vaše škola okresní komisi MO. Ta z nich vybere nejlepší řešitele a pozve je k účasti v okresním kole soutěže. Výběr účastníků v kategorii Z5 provádějí po dohodě s okresní komisí MO školy, které okresní kolo pořádají (viz níže).

Okresní kolo se uskuteční
pro kategorii Z9 **19. ledna 2016**,
pro kategorií Z6 až Z8 **5. dubna 2016**,
pro kategorií Z5 **19. ledna 2016**.

Okresní kolo pro kategorie Z6 až Z9 se pořádá zpravidla v okresním městě, v kategorii Z5 okresní kolo probíhá na několika školách okresu pověřených pořádáním.

Žáci pozvaní do okresního kola kategorie Z9 budou řešit samostatně v průběhu 4 hodin 4 soutěžní úlohy. Pozvaní žáci kategorií Z6 až Z8 budou samostatně řešit 3 úlohy v průběhu 2 hodin. Pozvaní žáci kategorie Z5 budou samostatně řešit 3 úlohy v průběhu 90 minut.

Ve všech kategoriích se řešení úloh obodují a podle součtu získaných bodů se sestaví pořadí účastníků okresního kola. Účastníci, kteří získají předepsaný počet bodů (zpravidla aspoň polovinu z dosažitelných bodů), se stanou úspěšnými řešiteli okresního kola a nejlepší z nich budou odměněni.

Krajské kolo pro kategorii Z9 se bude konat **22. března 2016** v některém městě vašeho kraje. Průběh soutěže a její vyhodnocení je stejné jako při okresním kole. Nejlepší účastníci krajského kola jsou vyhlášeni jeho vítězi.

Matematickou olympiádu pořádají *Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy, Jednota českých matematiků a fyziků a Matematický ústav Akademie věd České republiky*. Soutěž organizuje *ústřední komise MO*, v krajích ji řídí *krajské komise MO* při pobočkách JČMF a v okresech *okresní komise MO*. Na jednotlivých školách ji zajišťují pověření učitelé matematiky. Vy se obraťte na svého učitele matematiky.

Pokyny a rady soutěžícím

Řešení soutěžních úloh vypracujte čitelně na listy formátu A4. Každou úlohu začněte na novém listě a uveďte vlevo nahoře záhlaví podle vzoru:

Karel Veselý
8. B
ZŠ, Kulaté nám. 9, 629 79 Lužany
okres Znojmo
2015/2016
Úloha Z8–I–3

Řešení pište tak, aby bylo možno sledovat váš myšlenkový postup, podrobně vysvětlete, jak jste uvažovali. Uvědomte si, že se hodnotí nejen výsledek, ke kterému jste došli, ale hlavně správnost úvah, které k němu vedly.

Práce, které nebudou splňovat tyto podmínky nebo nebudou odevzány ve stanoveném termínu, nebudou do soutěže přijaty.

Na ukázkou uvedeme řešení úlohy z II. kola kategorie Z8 z jednoho z předcházejících ročníků MO:

Úloha Z8–II-1. Je dán obdélník s celočíselnými délkami stran. Jestliže zvětšíme jednu jeho stranu o 4 a druhou zmenšíme o 5, dostaneme obdélník s dvojnásobným obsahem. Určete strany daného obdélníku. Najděte všechny možnosti.

Řešení. Délky stran obdélníku označíme a , b . Nový obdélník má délky stran $a + 4$, $b - 5$. Podle podmínky úlohy pro obsahy obou obdélníků platí

$$2ab = (a + 4)(b - 5).$$

Postupně upravíme:

$$\begin{aligned} ab - 4b + 5a &= -20 && \text{(Odečteme 20,} \\ ab - 4b + 5a - 20 &= -40 && \text{abychom levou} \\ (a - 4)(b + 5) &= -40 && \text{stranu mohli} \\ &&& \text{rozložit na součin.)} \end{aligned}$$

Řešení najdeme rozkladem čísla -40 na 2 činitele. Přitom musí být $a > 0$, $b > 0$, a tedy $a - 4 > -4$, $b + 5 > 5$. Jsou dvě možnosti:

$$(-2) \cdot 20 = -40 \quad \text{a} \quad (-1) \cdot 40 = -40.$$

V prvním případě dostaneme obdélník o stranách $a = 2$, $b = 15$ s obsahem $S = 30$. Nový obdélník pak má strany $a' = 6$, $b' = 10$ a obsah $S' = 60$, tj. $S' = 2S$.

V druhém případě dostaneme obdélník o stranách $a = 3$, $b = 35$ s obsahem $S = 105$. Nový obdélník pak má strany $a' = 7$, $b' = 30$ a obsah $S' = 210$. Opět je $S' = 2S$.

KATEGORIE Z5

Z5-I-1

Číslo 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 a 9 cestovala vlakem. Vlak měl tři vagóny a v každém se vezla právě tři čísla. Číslo 1 se vezlo v prvním vagónu a v posledním vagónu byla všechna čísla lichá. Průvodčí cestou spočítal součet čísel v prvním, druhém i posledním vagónu a pokaždé mu vyšel stejný součet.

Určete, jak mohla být čísla do vagónů rozdělena. (V. Hucíková)

Z5-I-2

Marta nesla své nemocné kamarádce Marušce 7 jablek, 6 hrušek a 3 pomeranče. Cestou ale dva kusy ovoce snédla. Určete, která z následujících situací mohla nastat a jaké dva kusy ovoce by Marta v takovém případě musela sníst:

- Maruška nedostala žádný pomeranč.
- Maruška dostala méně hrušek než pomerančů.
- Maruška dostala stejný počet jablek, hrušek i pomerančů.
- Maruška dostala stejný počet kusů ovoce dvojího druhu.
- Maruška dostala více jablek než zbývajících kusů ovoce dohromady.

(L. Hozová)

Z5-I-3

Maminka vyprala čtvercové utěrky a věší je vedle sebe na prádelní šňůru nataženou mezi dvěma stromy. Použila šňůru o délce 7,5 metru, přičemž na uvázání kolem kmenů potřebovala na každé straně 8 dm. Všechny utěrky mají šířku 45 cm. Mezi krajní utěrkou a kmenem maminka nechává mezeru alespoň 10 cm, utěrky se jí nepřekrývají a nemá je složené ani skrčené.

Kolik nejvíce utěrek může takto pověsit na nataženou šňůru?

(L. Dedková)

Z5-I-4

Když pan Beran zakládal chov, měl bílých ovcí o 8 více než černých. V současnosti má bílých ovcí čtyřikrát více než na začátku a černých třikrát více než na začátku. Bílých ovcí je teď o 42 více než černých. Kolik nyní pan Beran chová bílých a černých ovcí dohromady? (L. Šimůnek)

Z5–I–5

Čtvercová síť se skládá ze čtverců se stranou délky 1 cm. Narýsujte do ní alespoň tři různé obrazce takové, aby každý měl obsah 6 cm^2 a obvod 12 cm a aby jejich strany splývaly s přímkami sítě. (E. Semerádová)

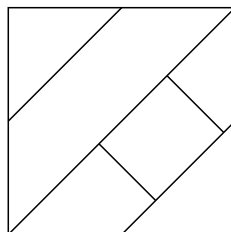
Z5–I–6

V nepřestupném roce bylo 53 nedělí. Na jaký den týdne připadl Štědrý den? (M. Volfová)

KATEGORIE Z6

Z6–I–1

Archeologové zjistili, že vlajka bájného matematického království byla rozdělena na šest polí, tak jako na obrázku. Ve skutečnosti byla vlajka třibarevná a každé pole bylo vybarveno jednou barvou.



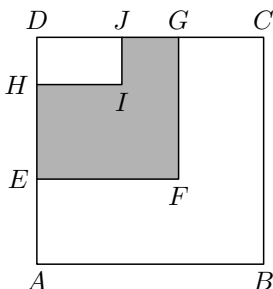
Vědci už vybádali, že na vlajce byla použita červená, bílá a modrá barva, že vnitřní obdélníkové pole bylo bílé a že spolu nesousedila dvě pole stejné barvy. Určete, kolik možností vzhledu vlajky musí archeologové v této fázi výzkumu zvažovat. (V. Hucíková)

Z6–I–2

Jiřík šel do služby k čarodějovi. Ten měl v prvním sklepě víc much než pavouků, ve druhém naopak. V každém sklepě měli mouchy a pavouci dohromady 100 nohou. Určete, kolik mohlo být much a pavouků v prvním a kolik ve druhém sklepě. (M. Krejčová)

Z6–I–3

Na obrázku je čtverec $ABCD$, čtverec $EFGD$ a obdélník $HIJD$. Body J a G leží na straně CD , přičemž platí $|DJ| < |DG|$, a body H a E leží na straně DA , přičemž platí $|DH| < |DE|$. Dále víme, že $|DJ| = |GC|$. Šestiúhelník $ABCGFE$ má obvod 96 cm, šestiúhelník $EFGJIH$ má obvod 60 cm a obdélník $HIJD$ má obvod 28 cm.

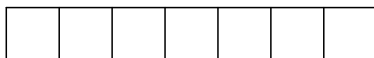


Určete obsah šestiúhelníku $EFGJIH$.

(L. Šimůnek)

Z6–I–4

Na obrázku je obdélník rozdělený na 7 políček. Na každé políčko se má napsat právě jedno z čísel 1, 2 a 3.



Mirek tvrdí, že to lze provést tak, aby součet dvou vedle sebe napsaných čísel byl pokaždé jiný. Zuzka naopak tvrdí, že to není možné. Rozhodněte, kdo z nich má pravdu. (V. Hucíková)

Z6–I–5

Pan Cuketa měl obdélníkovou zahradu, jejíž obvod byl 28 metrů. Obsah celé zahrady vyplnily právě čtyři čtvercové záhony, jejichž rozměry v metrech byly vyjádřeny celými čísly.

Určete, jaké rozměry mohla mít zahrada. Najděte všechny možnosti. (L. Hozová)

Z6–I–6

V zámecké kuchyni připravují nudlovou polévku v hrncích a kotlích. V pondělí uvařili 25 hrnců a 10 kotlů polévky. V úterý uvařili 15 hrnců a 13 kotlů. Ve středu uvařili 20 hrnců a ve čtvrtek 30 kotlů. Přitom v pondělí a v úterý uvařili stejné množství polévky.

Kolikrát víc polévky uvařili ve čtvrtek než ve středu? (K. Pazourek)

KATEGORIE Z7

Z7-I-1

Myška Hryzka našla 27 stejných krychliček sýra. Nejdříve si z nich poskládala velkou krychli a chvíli počkala, než se sýrové krychličky k sobě přilepily. Potom z každé stěny velké krychle vyhryzla střední krychličku. Poté snědla i krychličku, která byla ve středu velké krychle. Zbytek sýra chce Hryzka spravedlivě rozdělit svým čtyřem mláďatům, a proto ho chce rozřezat na čtyři kusy stejného tvaru i velikosti. Řezat bude jen podél stěn krychliček a nic k sobě už lepit nebude.

Jaký tvar mohou mít kusy sýra pro mláďata? Najděte alespoň dvě možnosti. (V. Hucíková)

Z7-I-2

Vlčkovi mají 4 děti. Ondra je o 3 roky starší než Matěj a Kuba o 5 let starší než nejmladší Jana. Víme, že je jim dohromady 30 let a před 3 lety jim bylo dohromady 19 let. Určete, jak jsou děti staré. (M. Volfová)

Z7-I-3

Uvnitř pravidelného pětiúhelníku $ABCDE$ je bod P takový, že trojúhelník ABP je rovnostranný. Jak velký je úhel BCP ? (L. Hozová)

Z7-I-4

V robotí škole do jedné třídy chodí dvacet robotů Robertů, kteří jsou očíslováni Robert 1 až Robert 20. Ve třídě je zrovna napjatá atmosféra, mluví spolu jen někteří roboti. Roboti s lichým číslem nemluví s roboty se sudým číslem. Mezi Roberty s lichým číslem spolu mluví pouze roboti, kteří mají číslo se stejným počtem číslic. Roberti se sudým číslem se baví pouze s těmi, jejichž číslo začíná stejnou číslicí.

Kolik dvojic robotů Robertů se může spolu vzájemně bavit?

(K. Pazourek)

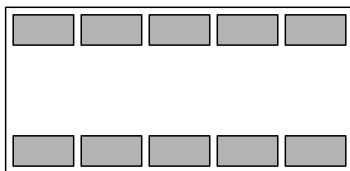
Z7-I-5

V kocourkovské škole používají zvláštní číselnou osu. Vzdálenost mezi čísly 1 a 2 je 1 cm, vzdálenost mezi čísly 2 a 3 je 3 cm, mezi čísly 3 a 4 je 5 cm a tak dále: vzdálenost mezi každou následující dvojicí přirozených čísel se vždy zvětší o 2 cm.

Mezi kterými dvěma přirozenými čísly je na kocourkovské číselné ose vzdálenost 39 cm? Najděte všechny možnosti. (K. Pazourek)

Z7–I–6

Na výstavě dlouhokrstých koček se sešlo celkem deset vystavujících. Vystavovalo se v obdélníkové místnosti, ve které byly dvě řady stolů jako na obrázku.



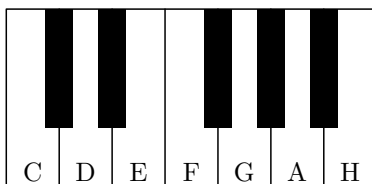
Kočky byly označeny navzájem různými čísly v rozmezí 1 až 10 a na každém stole seděla jedna kočka. Určete, která kočka byla na výstavě hodnocena nejlépe, pokud víte, že:

- a) součet čísel koček sedících naproti sobě byl vždy stejný,
- b) součet čísel každých dvou koček sedících vedle sebe byl sudý,
- c) součin čísel každých dvou koček sedících vedle sebe v dolní řadě je násobek čísla 8,
- d) kočka číslo 1 není na kraji a je víc vpravo než kočka číslo 6,
- e) vyhrála kočka sedící v pravém dolním rohu. (M. Mach)

KATEGORIE Z8

Z8–I–1

Míša měl na poličce malé klávesy, které vidíte na obrázku. Na bílých klávesách byly vyznačeny jejich tóny.



Klávesy našla malá Klára. Když je brala z poličky, vypadly jí z ruky a všechny bílé klávesy se z nich vysypaly. Aby se bratr nezlobil, začala je Klára skládat zpět. Všimla si přitom, že se daly vložit jen na některá místa, neboť jim překážely černé klávesy umístěné přesně doprostřed mezi dvě bílé.

Kláře se podařilo klávesy nějak složit, avšak tóny na nich byly pomíchané, protože ještě neznala hudební stupnici. Zjistěte, kolika způsoby mohla Klára klávesy poskládat. *(E. Novotná)*

Z8–I–2

Na louce se pasou koně, krávy a ovce, dohromady jich je méně než 200. Kdyby bylo krav 45krát víc, koní 60krát víc a ovcí 35krát víc, než kolik jich je nyní, jejich počty by se rovnaly. Kolik se na louce pase koní, krav a ovcí dohromady? *(M. Krejčová)*

Z8–I–3

Je dán rovnoramenný lichoběžník $ABCD$, v němž platí

$$|AB| = 2|BC| = 2|CD| = 2|DA|.$$

Na jeho straně BC je bod K takový, že $|BK| = 2|KC|$, na jeho straně CD je bod L takový, že $|CL| = 2|LD|$, a na jeho straně DA je bod M takový, že $|DM| = 2|MA|$.

Určete velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku KLM . *(J. Zhouf)*

Z8–I–4

V komoře, kde se rozbilo světlo a vše z ní musíme brát poslepu, máme ponožky čtyř různých barev. Chceme-li si být jisti, že vytáhneme alespoň dvě bílé ponožky, musíme jich z komory přinést 28. Abychom měli takovou jistotu pro šedé ponožky, musíme jich přinést také 28, pro černé ponožky stačí 26 a pro modré ponožky 34.

Kolik je celkem v komoře ponožek? (E. Semerádová)

Z8–I–5

Číslo dne je pořadové číslo daného dne v příslušném měsíci (tedy např. číslo dne 5. srpna 2016 je 5). Ciferný součet dne je součet hodnot všech číslic v datu tohoto dne (tedy např. ciferný součet dne 5. srpna 2016 je $5 + 8 + 2 + 0 + 1 + 6 = 22$). Šťastný den je takový den, jehož číslo dne je rovno cifernému součtu dne.

Určete, kolik šťastných dní je v roce 2016 a které dny to jsou. (L. Růžičková)

Z8–I–6

Katka narýsovala trojúhelník ABC . Střed strany AB si označila jako X a střed strany AC jako Y . Na straně BC chce najít takový bod Z , aby obsah čtyřúhelníku $AXZY$ byl co největší. Jakou část trojúhelníku ABC může maximálně zabírat čtyřúhelník $AXZY$? (A. Bohiniková)

KATEGORIE Z9

Z9–I–1

Objem vody v městském bazénu s obdélníkovým dnem je 6 998,4 hektolitrů. Propagační leták uvádí, že kdybychom chtěli všechnu vodu z bazénu přelít do pravidelného čtyřbokého hranolu s podstavnou hranou rovnající se průměrné hloubce bazénu, musel by být hranol vysoký jako blízký televizní vysílač a pak by byl naplněný až po okraj.

Dodáváme, že kdybychom chtěli uplavat vzdálenost stejnou, jako je výška vysílače, museli bychom přeplavat buď osm délek, nebo patnáct šířek bazénu. Jak vysoký je vysílač? *(L. Šimůnek)*

Z9–I–2

Úžasným číslem nazveme takové sudé číslo, jehož rozklad na součin prvočísel má právě tři ne nutně různé činitele a součet všech jeho dělitelů je roven dvojnásobku tohoto čísla. Najděte všechna úžasná čísla.

(M. Mach)

Z9–I–3

Jirka sestrojil čtverec $ABCD$ o straně 12 cm. Do tohoto čtverce narýsoval čtvrtkružnici k , která měla střed v bodě B a procházela bodem A , a půlkružnici l , která měla střed v polovině strany BC a procházela bodem B .

Rád by ještě sestrojil kružnici, která by ležela uvnitř čtverce a dotýkala se čtvrtkružnice k , půlkružnice l i strany AB . Určete poloměr takové kružnice. *(M. Volfová)*

Z9–I–4

V tabulce je kurzovní lístek směnárny, avšak některé hodnoty jsou v něm nahrazeny otazníky. Směnárna vyměňuje peníze v uvedených kurzech a neúčtuje si jiné poplatky.

	nákup	prodej
1 EUR	26,20 CZK	28,00 CZK
1 GBP	? CZK	? CZK

1. Kolik eur dostane zákazník, pokud zde smění 4 200 Kč?

Když směnárník vykoupí od zákazníka 1 000 liber a poté je všechny prodá, jeho celkový zisk je 2 200 Kč. Kdyby místo toho směnárník prodal 1 000 liber a poté by všechny utržené koruny směnil s jiným zákazníkem za libry, vydělal by na tom 68,75 liber.

2. Za kolik korun směnárník nakupuje a za kolik prodává 1 libru?

(*L. Šimůnek*)

Z9–I–5

Bětka napsala přirozené číslo s navzájem různými číslicemi. Pod něj zapsala číslice původního čísla odzadu a tak získala nové číslo se stejným počtem číslic. Sečtením těchto dvou čísel dostala číslo, které opět mělo stejný počet číslic jako myšlené číslo a skládalo se pouze z číslic myšleného čísla (avšak nemuselo obsahovat všechny jeho číslice).

Eric se Bětčino číslo zalíbilo a chtěla si najít jiné číslo se stejnými vlastnostmi. Zjistila, že neexistuje menší takové číslo než Bětčino a větší se jí hledat nechce. Určete, jaké číslo si myslí Bětka a jaké číslo by mohla najít Erika, kdyby měla víc trpělivosti.

(*K. Jasenčáková*)

Z9–I–6

Na stranách AB a AC trojúhelníku ABC leží po řadě body E a F , na úsečce EF leží bod D . Přímky EF a BC jsou rovnoběžné a současně platí

$$|FD| : |DE| = |AE| : |EB| = 2 : 1.$$

Trojúhelník ABC má obsah 27 hektarů a úsečkami EF , AD a DB je rozdělen na čtyři části. Určete obsahy těchto čtyř částí.

(*V. Žádník*)